Функции многих переменных

Содержание

1. Предел функции $f(M)$ в точке M_0

(функция $u = f(M)$ m переменных определена на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^m$)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, M_0) > 0$: как только $\quad 0 < \rho(M_0, M) < \delta$ $(M \in D)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow |f(M) - A| < \varepsilon. \quad A = \lim\limits_{M \to M_0} f(M).$

2. Приёмы вычисления кратных пределов

а) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ замена: $x_1 = x - x_0,\ y_1 = y - y_0 \quad \lim\limits_{\substack{x_1 \to 0 \\ y_1 \to 0}} f(x, y).$

б) Оценить модуль выражения сверху,
например: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0 \quad |\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}| = |x||\frac{xy}{x^2 + y^2}| \leq \frac{|x|}{2} \to 0.$

в) Использование известных (не)равенств, например : $\frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}$.

г) Для доказательства несуществования предела подобрать две последовательности точек.

д) Переход к полярным координатам $\{x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi\}$ (пределы от функций 2-х переменных).

е) Сведение к вычислению предела одной переменной.
$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to -1}} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = [t = x + y] = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$

ж) Для доказательства несуществования проверять сходимость предела вдоль разных прямых и кривых ($y = kx, y = kx^2 \ldots$).

и) Переход к сферическим координатам $x = r\sin\theta\cos\phi$,
$y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta$ (пределы от функций 3-х переменных).

к) Замена $\{x = r\cos\alpha,\ y = r\cos\beta,\ z = r\cos\gamma\}$
при условии $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

л) Формула Тейлора.

3. Непрерывность

$u = f(x_1, \ldots, x_m), \quad M_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0).$
$\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0); \quad \lim\limits_{M \to M_0} \Delta u(M_0) = 0.$

$$\Big(\Delta u(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)\Big)$$

4. Равномерная непрерывность

а) Определение (для функции $u = f(M)$ m переменных, определенной на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^m$): $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon)$: $\forall M_1, M_2 \in D \quad \rho(M_1, M_2) < \delta$ верно $|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$.

б) Функция непрерывна на компакте (замкнутом ограниченном множестве) $\Rightarrow$ функция равномерно непрерывна на этом компакте.

в) $f(x_1, \ldots, x_m) \quad |f'_{x_1}| \le C \quad \ldots \quad |f'_{x_m}| \le C \Rightarrow f$ - равномерно непрерывная.

г) $f(x, y)$ непрерывна при $x^2 + y^2 \ge a^2$ и существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} f(x, y) = A \Rightarrow f(x, y)$ равномерно непрерывна при $x^2 + y^2 \ge a^2$.

д) f непрерывна на ограниченном незамкнутом множестве D. f равномерно непрерывна на $D \Leftrightarrow$ её можно непрерывным образом доопределить на замыкание $\overline{D}$.

е) f не ограничена в каждой окрестности $M_0 \Rightarrow f$ не является равномерно непрерывной на каждом множестве, для которого M_0 предельная точка.

ж) Для доказательства, что функция не является равномерно непрерывной на множестве D должно выполняться условие:
$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 : \exists M_1, M_2 \in D \quad \rho(M_1, M_2) < \delta$ верно $|f(M_1) - f(M_2)| \ge \varepsilon$ (подобрать две последовательности точек, выполняющие это условие).

5. Частная производная

а) $u = f(x_1, \ldots, x_m)$
$f'_{x_k}(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x_k} = \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} f(M)}{\Delta x_k}$;
$\Delta_{x_k} f(M) = f(x_1, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_m) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_m)$;

б) Для функции двух переменных $f(x, y)$

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

6. Дифференцируемость

а) Функция $f(x_1, \dots, x_m)$ дифференцируема в точке M, если

$$\Delta f(M) = A_1\Delta x_1 + \dots + A_m\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\Delta x_m;$$
$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2} \Rightarrow \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\Delta x_m = \bar{o}(\rho) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta f(M) = A_1\Delta x_1 + \dots + A_m\Delta x_m + \bar{o}(\rho).$$

б) Условие дифференцируемости (для функции двух переменных $f(x, y)$)

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \bar{o}(\rho) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{o}(\rho) = \Delta f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)\Delta x - f'_y(x_0, y_0)\Delta y;$$
$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$
$$\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)\Delta x - f'_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

.

7. Первый дифференциал

$u = f(x_1, \dots, x_m)$

а) $df(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(M)}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial f(M)}{\partial x_m}dx_m$.

$df(x, y) = f'_x dx + f'_y dy$.

б) Свойства дифференциалов:

$d(u \pm v) = du \pm dv;\ d(cu) = cdu;\ d(uv) = udv + vdu;\ d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

8. Дифференциал n-ого порядка

$u = f(x_1, \dots, x_m), \quad x_1, \dots, x_m$ - независимые переменные.

$d^n f = \sum\limits_{i_1=1}^{m}\sum\limits_{i_2=1}^{m}\cdots\sum\limits_{i_n=1}^{m} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_n}} dx_1 dx_2 \dots dx_n$

символическая упрощённая запись: $d^n f = (\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m)^n f$

$z = f(x, y) \qquad d^2 z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$

$u = f(x, y, z) \quad d^2 u = u''_{xx}dx^2 + u''_{yy}dy^2 + u''_{zz}dz^2 + 2u''_{xy}dxdy + 2u''_{xz}dxdz +$
$+ 2u''_{yz}dydz$.

9. Дифференцирование сложной функции

а) $\{x_1 = x_1(t_1, \dots, t_k),\ x_2 = x_2(t_1, \dots, t_k),\ \dots,\ x_m = x_m(t_1, \dots, t_k)\}$.
$u = f(x_1, \dots, x_m)$

$$d^2u = d(\tfrac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \tfrac{\partial u}{\partial x_m}dx_m) =$$
$$= d(\tfrac{\partial u}{\partial x_1})dx_1 + \dots + d(\tfrac{\partial u}{\partial x_m})dx_m + \tfrac{\partial u}{\partial x_1}d^2x_1 + \dots + \tfrac{\partial u}{\partial x_m}d^2x_m =$$
$$= (\tfrac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \tfrac{\partial}{\partial x_m}dx_m)^2 u + \tfrac{\partial u}{\partial x_1}d^2x_1 + \dots + \tfrac{\partial u}{\partial x_m}d^2x_m.$$

б) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t_1} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dots + \dfrac{\partial u}{\partial x_m}\dfrac{\partial x_m}{\partial t_1} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial t_k} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_k} + \dots + \dfrac{\partial u}{\partial x_m}\dfrac{\partial x_m}{\partial t_k} \end{cases}.$

в) если $\{x_1 = x_1(t_1), x_2 = x_2(t_1), \dots, x_m = x_m(t_1)\}$, то

$$\tfrac{du}{dt} = \tfrac{\partial u}{\partial x_1}\tfrac{dx_1}{dt} + \dots + \tfrac{\partial u}{\partial x_m}\tfrac{dx_1}{dt}.$$

г) Полная производная

$F(u, x_1, \dots, x_m)$ $u = u(x_1, \dots, x_m)$ $\quad \frac{dF}{dx_i} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad i = \overline{1, m}$

$z = z(t, x, y),\ x = x(t),\ y = y(t)$ $\quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$

10. Производная по направлению и градиент

а) $u = f(x_1, \dots, x_m), \quad M_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0), \quad \bar{e} = \{e_1, \dots, e_m\}, \quad |\bar{e}| = 1$

$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \bar{e}} = \lim\limits_{l \to 0} \frac{f(x_1^0 + le_1, \dots, x_m^0 + le_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)}{l}.$

б) $M_0(x_0, y_0, z_0), \quad \bar{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \bar{e}} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma.$

в) $grad\ f(M_0) = \{\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m}\}$

$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \bar{e}} = \big(grad\ f(M_0), \bar{e}\big), \quad \max\limits_{e} \frac{\partial f(M_0)}{\partial \bar{e}} = |grad\ f(M_0)|.$

11. Формула Тейлора

а) $u = f(x_1, \dots, x_m)$

$f(M) = f(M_0) + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left((x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^0)\frac{\partial}{\partial x_m} \right)^k f(M_0) + R_n(M)$

С дифференциалами: $f(M) = f(M_0) + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(M_0) + R_n(M)$

$R_n(M) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_1^0 + \theta dx_1, \cdots, x_m^0 + \theta dx_m)$ $R_n(M) = \bar{o}(\rho^n)$.

б) Ряд Тейлора в окрестности точки (x_0, y_0) для $f(x, y)$:

$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum\limits_{i+j \geq 1}^{+\infty} \frac{1}{i!j!} f_{x^i y^j}^{(i+j)}(x_0, y_0)(x - x_0)^i (y - y_0)^j$.

12. Касательная и нормаль к плоской кривой

а) $y = y(x)$ касательная: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$;
нормаль: $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$.

б) $F(x, y) = 0$ касательная: $F_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y'(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$;
нормаль: $F_y'(x_0, y_0)(x - x_0) + F_x'(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$.

в) $\begin{cases} x = x(t) & \text{касательная: } \dfrac{x - x_0}{x_t'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{y_t'(t_0)} \quad \left(y_x'(x_0) = \dfrac{y_t'(t_0)}{x_t'(t_0)} \right); \\ y = y(t) & \text{нормаль: } \dfrac{x - x_0}{y_t'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{-x_t'(t_0)}. \end{cases}$

13. Касательная прямая и нормальная плоскость к пространственной кривой

а) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ касательная: $\frac{x - x_0}{x_t'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y_t'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z_t'(t_0)}$;

нормальная плоскость: $x_t'(t_0)(x - x_0) + y_t'(t_0)(y - y_0) + z_t'(t_0)(z - z_0) = 0$.

б) задание кривой: $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

касательная: $\begin{cases} F_x'(M_0)(x - x_0) + F_y'(M_0)(y - y_0) + F_z'(M_0)(z - z_0) = 0 \\ G_x'(M_0)(x - x_0) + G_y'(M_0)(y - y_0) + G_z'(M_0)(z - z_0) = 0 \end{cases}$

нормальная плоскость: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{vmatrix} = 0.$

14. Касательная плоскость и нормальная прямая к поверхности

а)$z = f(x,y),\ M_0(x_0,y_0,z_0)$
касательная плоскость: $z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0);$
нормальная прямая: $\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}.$

б)$F(x,y,z) = 0$
касательная плоскость: $F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0) = 0;$
нормальная прямая: $\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$

в) $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$
касательная плоскость: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0;$
нормальная прямая: $\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}.$

15. Локальные экстремумы

$u = f(x_1,\ldots,x_m)$
а) Необходимое условие: $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_i} = 0 \quad i = \overline{1,m}.$

б) 1-ое достаточное условие (знак 2-ого дифференциала):
1) $d^2f(M_0) < 0$ M_0 – строгий максимум;
2) $d^2f(M_0) > 0$ M_0 – строгий минимум;
3) знак $d^2f(M_0)$ не определён - в M_0 нет экстремума;
4) $d^2f(M_0) = 0,$ или $d^2f(M_0) \geq 0,$ или $d^2f(M_0) \leq 0$ непонятно, нужны доп. исследования.

в) Знак n-ого дифференциала $df(M_0) = \ldots = d^{n-1}f(M_0) = 0$
1) n-нечёт. в M_0 нет экстремума;
2) n-чёт. $d^nf(M_0) < 0$ M_0–строгий максимум; $d^nf(M_0) > 0$ M_0– строгий минимум.

г) 2-ое достаточное условие (критерий Сильвестра)

1) $f(x,y) \quad D_1 = f''_{xx} \quad D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$

1.1) $D_1 > 0, D_2 > 0 \quad M_0$ - строгий минимум;

1.2) $D_1 < 0, D_2 > 0 \quad M_0$ - строгий максимум;

1.3) $D_2 < 0$ в M_0 нет экстремума;

1.4) $D_2 = 0$ нужны доп. исследования.

2) $f(x,y,z) \quad D_1 = f''_{xx}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix}$

2.1) $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0 \quad M_0$ - строгий минимум;

2.2) $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0 \quad M_0$ - строгий максимум;

2.3) не 2.1 и не 2.2 и $D_3 \neq 0$ M_0 - седловая точка (нет экстремума);

2.4) $D_3 = 0$ нужны доп. исследования.

д) Необходимое и достаточное условие

M_0 – нестрогий максимум $\Leftrightarrow \Delta f(M_0) \leq 0$;

M_0 – нестрогий минимум $\Leftrightarrow \Delta f(M_0) \geq 0$.

16. Теорема существования и единственности однозначно дифференцируемой функции одной (двух) переменных, заданной явно

1) $F(x,y)$ обнуляется в точке $M_0(x_0, y_0)$.

2) $F(x,y)$ и $F'_y(x,y)$ определены и непрерывны в окрестности точки M_0.

3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда в окрестности x_0 существует единственная однозначная непрерывная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая условию $F(x,y) = 0$ и $y_0 = f(x_0)$.

4) Если ещё $F(x,y)$ дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, то $y = f(x)$ дифференцируема в окрестности x_0 и $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$

Пусть для $F(x,y,z)$ выполняются все условия теоремы, тогда существует единственная однозначная функция $z = f(x,y)$, удовлетворяющая условию $F(x,y,z) = 0$ и $z_0 = f(x_0, y_0)$.

При этом $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$.

17. Теорема существования и единственности системы неявных функций

Дана система: $\{F_i(x_1,\dots,x_m;y_1,\dots,y_n) \quad i=\overline{1,n}$

1) Функции из системы обнуляются в $M_0(x_1^0,\dots,x_m^0;y_1^0,\dots,y_n^0)$.
2) Функции из системы дифференцируемы в окрестности M_0.
3) Функциональный определитель (якобиан) не обнуляется в точке

$\bar{M}_0(x_1^0,\dots,x_m^0): \quad \frac{\partial(F_1,\dots,F_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$

Тогда существует единственная система дифференцируемых функций (в окрестности M_0) $y_i = f_i(x_1,\dots,x_m),\ i=\overline{1,n}; \quad f_i(x_1^0,\dots,x_m^0)=y_i^0,\ i=\overline{1,n}$.

$\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k = 0,\ i=\overline{1,n}; \quad \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = 0,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}.$

18. Условный экстремум и метод Лагранжа

функция $u=f(x_1,\dots,x_m)$

$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_m)=0 \\ \dots \\ F_n(x_1,\dots,x_m)=0 \end{cases}$ уравнения связи.

Функция Лагранжа: $L(x_1,\dots,x_m;\lambda_1,\dots,\lambda_n) = f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_n F_n$
$\lambda_1,\dots,\lambda_n$ - множители Лагранжа

1) Необходимое условие условного экстремума: $\begin{cases} L'_{x_1}=0 \\ \dots \\ L'_{x_m}=0 \\ F_1=0 \\ \dots \\ F_n=0 \end{cases}$

2)Для найденных стационарных точек использовать достаточные условия (для функции $f(x)$).

3)Продифференцировав уравнения связи, можно получить зависимость между дифференциалами $dx_1,\dots,dx_m$ и выразить часть из них через другие.